ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES III
OPTION ECONOMIQUE

mercredi 18 mai 1994, de 14 h à 18 h

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx .$$

1. Calculer u_0 et u_1.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

3.a) Exprimer, pour $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n.

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \right)$.

4. Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a, \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = n v_{n-1} - 1.$$

Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est divergente.

5.a) Montrer que, pour tout entier naturel,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)} .$$

b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2, que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

Soit la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$.

2. En déduire que A admet trois valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 qui vérifient :

$$\lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3.$$

3. On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$f(\lambda) = \frac{1}{6}\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 8\right).$$

a) Montrer que $f(\lambda_2) = \lambda_2$.
b) Montrer que le segment $[1,2]$ est stable par f (c'est à dire que $f([1,2]) \subset [1,2]$).
c) Montrer que, pour tout λ de $[1,2]$, $|f(\lambda) - f(\lambda_2)| \leq \frac{1}{3}|\lambda - \lambda_2|$.

4. Soit $x_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n = f(x_{n-1})$.
a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers λ_2.
b) Donner une valeur approchée de x_1, x_2, x_3 et x_4 à 10^{-2} près.
c) Donner une majoration de $|x_4 - \lambda_2|$.

5.a) En utilisant la factorisation

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

calculer $\lambda_1 + \lambda_3$ et $\lambda_1\lambda_3$ en fonction de λ_2.
b) On prend x_4 comme valeur approchée de λ_2 : en déduire des valeurs approchées de λ_1 et λ_3.

6.a) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
b) Montrer qu'on peut trouver dans $\mathbf{R}^3$ une base (V_1, V_2, V_3) de vecteurs propres de A de la forme

$$V_1 = (p(\lambda_1), \lambda_1, q(\lambda_1)), \qquad V_1 = (p(\lambda_2), \lambda_2, q(\lambda_2)), \qquad V_1 = (p(\lambda_3), \lambda_3, q(\lambda_3)),$$

où p et q sont des polynômes qu'on déterminera.

EXERCICE 3

On dispose d'un paquet de m cartes, m étant un entier supérieur ou égal à 2. Ces cartes sont numérotées de 1 à m.

Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 franc que B lui verse à chaque partie :

B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme de $(\beta - \alpha)$ francs : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ francs.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 franc : B a donc perdu 2 francs.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 franc, le montant de sa mise.

1. On suppose dans cette question que $m = 6$.

a) Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β).

b) Soit X la variable aléatoire représentant les gains de B. Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il équilibré ou avantage-t-il l'un des joueurs ?

d) Calculer la variance de X.

2. On revient au cas général : $m \geq 2$.

a) Etablir, en préliminaire, les formules suivantes, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad , \qquad \sum_{k=1}^{N} k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \quad .$$

b) Calculer, en fonction de m, l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

c) Pour quelles valeurs de m l'espérance de X est-elle positive ?

d) Calculer, en fonction de m, la variance de X.

3. On observe n parties successives et on note $Y_n(m)$ le nombre de parties où le gain de B est strictement positif.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y_n(m)$, son espérance et sa variance en fonction de n et m.